

接ベクトルと接空間

多様体を大雑把にいうならば、「曲がった空間」である。その曲がった空間をまっすぐな空間、つまり \mathbb{R}^m で近似したものが接空間である。曲線や曲面において、ある点での接線や接平面といったものを考えたことがあるはずである。その高次元の解釈がこの接ベクトルと接空間である。

以下、 M は滑らかな m 次元の多様体とする。また、点 $a \in M$ の周りの座標近傍を (x_1, \dots, x_m) を固定し、原点 $(0, \dots, 0)$ が a に対応するとしておく。

定義 0.1. $a \in M$ に対し、 x の開近傍を定義域とした滑らかな関数全体を $C(a)$ と書くことにする。 $f \in C(a)$ に対し、 $U(f)$ をその定義域とする。 $f, g \in C(a)$, $r \in \mathbb{R}$ に対し、

1. $f + g(x) = f(x) + g(x)$
2. $fg(x) = f(x)g(x)$
3. $rf(x) = r(f(x))$

で定義することにより、和、積、スカラー倍が定義できる。ただし定義域は $U(f+g) = U(fg) = U(f) \cap U(g)$ であり、 $U(rf) = U(f)$ である。

注意 0.2. $C(a)$ はベクトル空間ではない。 M 上の 0-写像 $0 : M \rightarrow \mathbb{R}$ が零元であるが、 $f - f$ は $U(f)$ 上では恒等的に 0 だが、 $U(f) \neq M$ の場合もあり、 f の逆元が存在しない。そこで、 $f \sim g \in C(a)$ をある開近傍 V 上で、 $f|_V = g|_V$ と定義すれば、これは同値関係となる。 $\text{Ge}(a) = C(a) / \sim$ とおき、 a における芽 (germ) と呼ぶ。これは $C(a)$ の和とスカラー倍からの誘導で \mathbb{R} 上のベクトル空間となり、積構造も合わせれば代数となる。

定義 0.3. 線形写像

$$\theta : \text{Ge}(a) \rightarrow \mathbb{R}$$

で、 $\theta(fg) = \theta(f)g(a) + f(a)\theta(g)$ を満たすもの全体の集合を $D(a)$ とおく。このようなライプニッツ公式を満たす線形写像を derivation と呼んだりする。このとき、

$$(\theta + \eta)(f) = \theta(f) + \eta(f), (r\theta)(f) = r(\theta(f))$$

で定義することにより、 $D(a)$ もまた \mathbb{R} 上のベクトル空間である。

例 0.4. $M = \mathbb{R}$ のとき $a \in \mathbb{R}$ に対し、 a での微分 $\frac{d}{dt} : \text{Ge}(a) \rightarrow \mathbb{R}$ は $D(a)$ の元である。

例 0.5. より一般に、 $a \in M$ の座標近傍 (x_1, \dots, x_m) を用いて、 a における偏微分

$$\partial/\partial x_i : \text{Ge}(a) \rightarrow \mathbb{R}$$

が定まるが、これらは $D(a)$ の元である。

補題 0.6. $a \in M$, $p \in \mathbb{R}$ とし、 $c_p \in \text{Ge}(a)$ を $p \in \mathbb{R} \rightarrow$ 定置写像とする。このとき、任意の $\theta \in D(a)$ に対し、 $\theta(c_p) = 0$ である。

証明 任意の $f \in D(a)$ に対し、 $c_p f = pf$ である。積の微分から、

$$\theta(c_p f) = \theta(c_p)f(a) + c_p(a)\theta(f) = \theta(c_p)f(a) + p\theta(f)$$

であるが、一方スカラー倍の微分から、

$$\theta(pf) = p\theta(f)$$

であるから、結局、 $\theta(c_p)f(a) = 0$ である。 $f \in C(a)$ は任意だったので、 $f(a) \neq 0$ となる f を選べば、 $\theta(c_p) = 0$ である。□

定義 0.7. $a \in M$ とする。 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ で、 $\gamma(0) = a$ となる滑らかな写像を a を通る曲線と呼ぶ。このとき、 $f \in C(a)$ に対し、 $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ が考えられる。(γ の像と、 $U(f)$ にギャップがあっても、 ε をいくらでも小さく取って、 $U(f)$ の中に収めてしまえばよい)。このとき、

$$X_\gamma f = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0}$$

とおき、 a における f の γ に沿った微分と呼ぶ。

補題 0.8. $X_\gamma \in D(a)$ である。

Proof. すぐにわかるのは、

$$(f + g) \circ \gamma = f \circ \gamma + g \circ \gamma$$

と、

$$(fg) \circ \gamma = (f \circ \gamma)(g \circ \gamma)$$

であるので、通常関数の和と積の微分法から、

$$X_\gamma(f + g) = X_\gamma(f) + X_\gamma(g)$$

$$X_\gamma(fg) = X_\gamma(f)(g \circ \gamma)(0) + (f \circ \gamma)(0)X_\gamma(g) = X_\gamma(f)g(a) + f(a)X_\gamma(g)$$

であり、特に上の式で $r \in \mathbb{R}$ 上への定置写像を $f = c_r$ とおくと、 $X_\gamma(c_r) = 0$ であつたから、

$$X_\gamma(rg) = X_\gamma(c_r g) = X_\gamma(c_r)g(a) + c_r(a)X_\gamma(g) = rX_\gamma(g)$$

となる。 □

定義 0.9 (接空間). $a \in M$ に対し、

$$T_a M = \{X_\gamma \in D(a) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \gamma(0) = a, \varepsilon > 0\}$$

とおき、これを a における M の接空間 (Tangent space) と呼び、元を接ベクトルと呼ぶ。次で見るように、接空間は m 次元のベクトル空間となる。

定理 0.10. $T_a M$ は $D(a)$ の m 次元部分ベクトル空間で、 a の周りの座標近傍 (x_1, \dots, x_m) に対し、

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$$

が基底となる。

証明 $X_\gamma \in T_a(M)$ に対し、座標近傍 (x_1, \dots, x_m) を用いて γ を成分表示し、 $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ と書くと、

$$X_\gamma = \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{d\gamma_j}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

である。

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$$

が基底であることを示す。これは、 $X = \sum_{1 \leq j \leq m} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ とすると、 i 成分の射影 $x_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、

$$X_{x_i} = \sum_{1 \leq j \leq m} \alpha_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \alpha_i$$

だからである。 □

例 0.11. 上記より $T_a \mathbb{R}^m$ をベクトル空間 \mathbb{R}^m と同一視する場合がある。単位ベクトル $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ に対応する接ベクトルが、通常偏微分作用素 $\partial/\partial x_i \in T_a \mathbb{R}^m$ である。

例 0.12. M の開部分多様体 W と $a \in W$ に対し、 $T_a W = T_a M$ である。

今までの話では、 a の周りの座標近傍 (x_1, \dots, x_m) を固定して考えてきた。定義からもわかるように、接ベクトルや接空間はこの座標近傍の取り方に依存している。では違う座標近傍を取った場合、どのような関係があるのだろうか。

補題 0.13. $a \in M$ の周りの座標近傍 (x_1, \dots, x_m) と、 (y_1, \dots, y_m) を考えたとき、

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(0) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

となる。これはつまり、接空間の基底の取り換えを意味している。ただしここで、分子にある y_j を $\psi \circ \varphi^{-1}$ の j 成分という (x_1, \dots, x_m) の関数と見ている。

証明 今、 $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ を (x_1, \dots, x_m) の、 $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ を (y_1, \dots, y_m) の表す座標近傍としよう。 $f \in \text{Ge}(a)$ 対し、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(0) \\ &= \frac{\partial(f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(0) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial y_j}(0) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(0) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(0) \frac{\partial}{\partial y_j} f \end{aligned}$$

となる。これより題意が示された。 □

補題 0.14. $f \in C(a)$ は定義域をより小さな近傍に制限することで、ある関数 $f_{ij} \in C(a)$ を用いて、

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) x_i + \sum_{i,j=1}^m f_{ij}(x) x_i x_j$$

と表せる。

証明 マクローリン展開を利用する。今、 a の近傍として十分小さい円盤 $B(a)$ を考える。つまり、 $x \in B(a)$, $0 \leq t \leq 1$ に対し、 $tx \in B(a)$ となつてすることに注意する。そのとき、

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{df}{dx}(xt) dt = \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(xt) dt$$

と表せる。このとき、 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ もまた $C(a)$ に属するので、今と同様の理論により、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(xt) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \sum_{j=1}^m x_j t \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(xts) ds$$

である。よって、

$$f_{ij}(x) = \int_0^1 t \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(xts) ds \right) dt$$

とおくことにより、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(0) + \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(xt) dt \\
 &= f(0) + \sum_{i=1}^m x_i \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + \left(\sum_{j=1}^m x_j t \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(xts) ds \right) \right) dt \right) \\
 &= f(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) x_i + \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^m x_j t \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(xts) ds \right) dt \\
 &= f(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) x_i + \sum_{i,j=1}^m f_{ij}(x) x_i x_j
 \end{aligned}$$

□

定理 0.15. M が滑らかならば、 $a \in M$ に対し、 $T_a M = D(a)$ である。

証明 接空間 $T_a M$ は $D(a)$ の部分空間であったから、逆の包含関係を示そう。今、 $\theta \in D(a) = \{\text{Ge}(a) \rightarrow \mathbb{R}\}$ をとる。補題 0.14 により、任意の $f \in C(a)$ を考えたとき、定置写像 $f(0)$ と射影 x_i たちにより、

$$f = f(0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) x_i + \sum_{i,j=1}^m f_{ij} x_i x_j$$

と表せていた。表記が少し紛らわしいが、状況によって $f(0)$ は値と思ったり、定置写像と思ったり、あるいは x_i を成分や変数と思ったり、射影と思ったりする。補題 0.6 と θ の性質により、

$$\theta(f) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \theta(x_i) + \sum_{i,j=1}^m (\theta(f_{ij}) x_i(0) x_j(0) + f_{ij}(0) \theta(x_i) x_j(0) + f_{ij}(0) x_i(0) \theta(x_j))$$

であるが、今 $x_i(0) = x_j(0) = 0$ であるので、

$$\theta(f) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \theta(x_i) = \left(\sum_{i=1}^m \theta(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f$$

なので、

$$\theta = \sum_{i=1}^m \theta(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} \in T_a(M)$$

となることがわかる。□

注意 0.16. 上記で多様体を滑らかとした理由は、有限回の微分可能性であると、 f_{ij} が 2 回微分を用いているので微分可能性が f よりも低くなっている。よって、 θ での操作に不都合が生じる。 M を滑らか、 f も滑らかな写像を考えていれば、 f_{ij} も滑らかだからである。これ以外の定義や、性質などは C^r 級、 $r \geq 1$ でも同様に展開できる。特に、接空間は 1 回微分の情報しか用いていないので、 C^1 情報ですべて決まる。

定義 0.17. 滑らかな写像 $f: M \rightarrow N$ と、 $a \in M$ に対し、まず、

$$f^*: \text{Ge}(f(a)) \rightarrow \text{Ge}(a), g \mapsto g \circ f$$

が誘導される。これは線形で積も保つ。積を保つことからライプニッツ公式を保存し、

$$f_*: D(a) \rightarrow D(f(a)), \theta \mapsto \theta \circ f^*$$

が誘導され、これも線形写像になる。定理 0.15 の同一視により、線形写像

$$df_a: T_a M \rightarrow T_{f(a)} N$$

が誘導され、これを f の a における微分と呼ぶ。具体的に書けば、 $X \in T_a M$ に対し、

$$df_a(X) : \text{Ge}(f(a)) \rightarrow \mathbb{R}$$

は、 $df_a(X)(g) = X(g \circ f)$ で与えられる。合成と恒等射に対し、 $d(g \circ f) = dg \circ df$, $d(1_M) = 1_{T_a M}$ であることは容易に示せるので、接空間を対応させることは、基点付きの多様体 (M, a) と基点を保つ滑らかな写像 f の圏から、ベクトル空間の圏へ $T_a M$, df_a を対応させる関手と考えられる。

例 0.18. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな写像とする。この微分

$$df_a : T_a M \rightarrow T_{f(a)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

を考えると、 $df_a(X) = X(f)$ である。なぜなら、最後の同型対応は $Y \in T_{f(a)} \mathbb{R}$ と $Y(1_{\mathbb{R}}) \in \mathbb{R}$ によって与えられている。よって、 $df_a(X)$ に対応するのは、 $df_a(X)(1_{\mathbb{R}}) = X(1_{\mathbb{R}} \circ f) = X(f)$ である。

例 0.19. $a \in M$ の周りの座標近傍 (x_1, \dots, x_m) が、 $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ によって与えられているとする。今、 U を M の開部分多様体とみなすと、

$$d\varphi_a : T_a U = T_a M \rightarrow T_{\varphi(a)} \mathbb{R}^m$$

が誘導され同型であるが、基底の対応を考えると

$$d\varphi_a \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

できちんと対応が付いている。

命題 0.20. $f : M \rightarrow N$ を滑らかな写像とし、 $a \in M$ の座標近傍が (x_1, \dots, x_m) , $f(a) \in N$ の座標近傍が (y_1, \dots, y_n) で与えられているとする。このとき、 $y_j = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ という写像の j 成分の (x_1, \dots, x_m) の関数とみなす。 f の a における微分は次の形で表示される。

$$df_a \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} (0) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

証明 $g \in C(f(a))$ に対し、

$$\begin{aligned} df_a \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) (g) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (g \circ f) \\ &= \frac{\partial (g \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} (0) \\ &= \frac{\partial ((g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))}{\partial x_i} (0) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial g \circ \psi^{-1}}{\partial y_j} (0) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} (0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} (0) \frac{\partial}{\partial y_j} (g) \end{aligned}$$

よって題意が示された。 □

ちなみに、 $M = N$ で $f = 1_M$ の場合が、補題 0.13 である。

定理 0.21. 積多様体 $M \times N$ の点 (a, b) において、接空間を考えると、射影 p_M, p_N によって

$$dp_M \times dp_N : T_{(a,b)}(M \times N) \rightarrow T_a M \oplus T_b N$$

は線形同型写像である。

証明 包含写像、 $i_M : M \rightarrow M \times N$, $i_N : N \rightarrow M \times N$ がそれぞれ $i_M(x) = (x, b)$, $i_N(y) = (a, y)$ により定義できる。 $p_N \circ i_M : M \rightarrow N$ は定置写像なので、 $dp_N \circ di_M$ は 0-写像である。逆も同じく。このことから、

$$(dp_M \times dp_N) \circ (di_M + di_N) = 1$$

であることがわかり、 $dp_M \times dp_N$ は全射である。今、

$$\dim(T_{(a,b)}(M \times N)) = \dim(T_a M \oplus T_b N) = \dim M + \dim N$$

であるため、全単射となる。 □

参考文献

[服部] 服部 晶夫 多様体 (岩波全書) [単行本] 岩波書店; 増補版 (1989)